Facoltà di Scienze Matematiche,
Fisiche e Naturali

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
presentata da Marika De Lucia

Sulla quadratura del cerchio e delle lunule

Relatore
Prof. Andrea Bruno

Il Candidato Il Relatore

Anno Accademico 2010-2011

Classificazione: O1A20, 08-03
Parole chiave: numeri costruibili, quadratura del cerchio, lunule, geometria iperbolica.

Sintesi

I problemi di costruzioni con riga e compasso sono stati un argomento chiave nella matematica greca, e quindi in tutta la matematica fino a tempi recenti: la soluzione di alcuni problemi classici, tramandatici dai Greci, ha dato un forte impulso per lo sviluppo di nuove discipline della matematica moderna come, ad esempio, la teoria dei campi.

Eseguire una costruzione con riga e compasso vuol dire, in parole povere, determinare oggetti geometrici a partire da altri oggetti dati, utilizzando come unici strumenti la riga ed il compasso. Naturalmente, ciò già richiede un primo livello di astrazione: le figure che noi possiamo tracciare sono inevitabilmente approssimative. Si pensi, ad esempio, allo spessore del tratto lasciato dalla matita: una retta, o un segmento, secondo i Greci deve essere formato da punti che sono, per definizione stessa, indivisibili. Quel che però è importante, non è il disegno in sè quanto la correttezza del procedimento che descriveremo: se diremo che un tale segmento è lungo 5 unità, all'interno della nostra costruzione ciò avrà un valore esatto, anche se nella pratica il segno tracciato sarà 5 più o meno qualcosa.

Un'altra precisazione necessaria riguarda gli strumenti da utilizzare. Con riga non si intende uno strumento per misurare o segnare distanze, ma sempre e soltanto un'asta rigida che permetta solo di tracciare una retta, che sarà sempre determinata da due punti che le appartengono. Un'osservazione più delicata, e spesso sorvolata, riguarda il compasso. Si tende ad utilizzare il compasso, tacitamente, come uno strumento "rigido" mentre invece, almeno in principio, è da considerarsi "molle". Spieghiamo meglio questa sottile, ma delicata, differenza. Il compasso è utilizzato per disegnare delle circonferenze. Una circonferenza è determinata dal suo centro e da un punto su di essa: si punta il compasso nel centro, si apre fino a raggiungere con la matita del compasso il punto della circonferenza e si traccia la circonferenza. Questo è il compasso "molle". Più spesso, però, la circonferenza è determinata assegnandone il centro ed il raggio. Il problema è allora di andare a rilevare tale lunghezza con il compasso (ricordiamo che la riga non permette di misurare le distanze) e poi trasportare il compasso fino a poter puntare nel centro e tracciare con l'apertura determinata. In questo procedimento si presuppone che il compasso sia "rigido", vale a dire che sia in grado di mantenere inalterata, in modo perfetto, l'apertura impostata. È evidente come questa sia una restrizione rispetto all'uso del compasso nel modo più abituale. Se quindi si vuole restare nella massima generalità possibile, bisogna solo considerare il compasso "molle"; ad ogni modo, il problema si aggira facilmente dimostrando come prima cosa che utilizzando riga e compasso "molle" è possibile costruire una circonferenza una volta che siano assegnati il centro ed un segmento qualsiasi del piano che funga da raggio, autorizzando in questo modo un utilizzo accettabile all'interno della teoria del compasso "rigido".

Fra i vari problemi considerati dai Greci ve ne sono alcuni che si distinguono per la brillantezza e l'abilità necessaria per arrivare alla soluzione e altri per la difficoltà della soluzione stessa, fino ad arrivare a quelli che hanno impegnato per secoli, se non millenni, generazioni di matematici, portando a soluzioni talvolta sorprendenti.

"I" problemi classici tramandati dai Greci sono la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo e la quadratura del cerchio. A questi possiamo senz'altro aggiungere la quadratura delle lunule e il problema di determinare una costruzione del poligono regolare di n lati. Per quest'ultimo problema la soluzione era nota fin dall'antichità per alcuni valori particolari, come per esempio $n = 3, 4, 5, 6$.

Come già sottolineato, la soluzione di tali problemi ammette solo l'uso della riga e del compasso: includendo l'uso di altri strumenti si allarga notevolmente il campo delle figure costruibili. Del resto, è naturale aspettarsi che l'insieme delle figure costruibili aumenti all'aumentare degli strumenti ammissibili: già i Greci, per esempio, avevano risolto il problema della duplicazione del cubo in più modi diversi, usando vari strumenti.

Per contro, come ha sorprendentemente dimostrato Mascheroni, ogni costruzione eseguibile con riga e compasso può essere eseguita col solo compasso. Naturalmente, non sarà possibile tracciare materialmente una retta, ma la si dovrà considerare nota tramite due suoi punti. Osserviamo, per amor di precisione, che questo risultato comunemente attribuito a Mascheroni è stato dimostrato in realtà per la prima volta dal matematico danese Georg Mohr che lo pubblicò nel libro "Euclides Danicus" nel 1672. Tale libro però venne pubblicato solo in danese ed olandese e rimase sostanzialmente sconosciuto alla comunità fino al 1928, quando uno studente di matematica ne trovò una copia in un negozio di libri usati e venne divulgato.

Se invece si cerca un analogo del risultato di Mascheroni-Mohr relativamente all'uso della sola riga, ci si convince subito che ciò non è possibile. Ciò che invece è possibile, come ha dimostrato Jacob Steiner nel 1833, è che tutte le costruzioni con riga e compasso sono effettuabili con la sola riga a patto che sia data anche una circonferenza (fissa) con il suo centro. Non è però possibile prescindere dal centro: se è data solo la circonferenza senza il centro, non si possono più effettuare tutte le costruzioni.

I problemi classici sono stati accanitamente studiati per secoli, e senza risultati, al punto da entrare addirittura nel lessico quotidiano: basti pensare che quando si dice che si affronta qualcosa di difficilissimo si dice che si sta cercando di "quadrare il cerchio".

Dopo lungo tempo di tentativi infruttuosi, ha iniziato ad insinuarsi l'idea, tra i matematici, che tali problemi fossero irrisolubili. Si affacciò dunque un problema diverso: come si può dimostrare che una data costruzione non possa essere eseguita?

Per arrivare a studiare la risolubilità o meno dei problemi classici fu però necessario aspettare che venissero gettate le fondamenta per l'algebra moderna. Anche in algebra vi era, in particolare, un problema antico che attirava l'attenzione degli studiosi: si trattava di determinare le soluzioni di un polinomio utilizzando solo espressioni che contenessero dei radicali. La soluzione di questo problema era ben nota da lungo tempo per le equazioni di grado 2 e nel XVI secolo si era scoperto che esiste una soluzione per le equazioni di terzo e quarto grado. Ciò aveva dato nuovo vigore alle ricerche finché i lavori di Ruffini (1765-1822), Abel (1802-29) (per le equazioni di quinto grado), e Galois (1811-32) (per la teoria generale relativa alle equazioni di grado superiore al quinto) non conclusero la questione dimostrando che, in generale, non è possibile determinare un'espressione che contenga solo radicali e che dia tutte le radici di un polinomio avente grado fissato, se questo grado è maggiore o uguale a 5. Ciò comunque non vuol dire che il polinomio non abbia radici: Gauss aveva già dimostrato, nella sua tesi di laurea nel 1799, che ogni polinomio di grado n ha esattamente n radici nel campo dei numeri complessi. Tali radici possono essere determinate con un grado arbitrario di precisione mediante metodi di approssimazione opportuni, e ciò ha grande importanza nelle applicazioni, ma non possono essere determinate in modo esatto tramite radicali.

La teoria utilizzata per ottenere questo risultato risultò molto efficace anche per studiare i problemi con riga e compasso. Efficace al punto tale che, in colpo solo, quasi tutti i problemi principali furono risolti! Questo, tra l'altro, è un bellissimo esempio dell'interdipendenza che hanno tra loro le varie discipline matematiche (algebra, geometria, analisi, ecc.): spesso i problemi sollevati nell'ambito di una disciplina trovano soluzione in un'altra, oppure servono da motivazione per lo sviluppo di discipline completamente nuove.

Concludiamo con un'osservazione sul concetto di impossibilità di una dimostrazione. Spesso, nel linguaggio comune, si dice che qualcosa è impossibile intendendo dire con ciò che sia estremamente difficile, se non, addirittura, che sia così difficile che nessuno sappia come fare. Quindi cercare di fare qualcosa etichettata in tal modo può essere considerato come una sfida per il proprio ingegno, tramite la quale dimostrare la propria superiorità nei confronti degli altri. Tale era la soluzione del problema della quadratura del cerchio prima della dimostrazione di Lindemann. Dopo tale dimostrazione, tuttavia, il termine "impossibile" ha preso il suo significato matematico: all'interno della teoria assiomatica che presupponiamo valere, dire che qualcosa è impossibile vuol dire che è stata dimostrata la falsità di una proposizione o, se si preferisce, la verità della sua negazione. Se quindi si riuscisse anche a dimostrare la verità della proposizione ciò vorrebbe dire che nella nostra teoria sarebbe possibile dimostrare sia una proposizione che la sua negazione: una catastrofe! Nonostante tutto questo, a tutt'oggi esistono ancora persone che si ingegnano di scovare costruzioni della quadratura del cerchio che si rivelano, ovviamente, invariabilmente errate: spesso sono delle ottime, anzi eccellenti, approssimazioni, ma mai costruzioni esatte, naturalmente. Per trovare l'errore può essere necessario anche molto tempo, per cui può capitare che quando un aspirante "quadratore" sottopone alla comunità matematica internazionale una presunta quadratura del cerchio, la sua soluzione venga direttamente inoltrata al cestino! E a nulla valgono, nè possono valere, le vibranti proteste dell'aspirante quadratore contro la "lobby" dei matematici ufficiali che non vuole riconoscere il suo genio!

Nel dettaglio la tesi è così organizzata.

Nel **primo capitolo** viene tradotto nel linguaggio dell'algebra l'antico problema delle costruzioni con riga e compasso.

Intuitivamente un punto del piano è costruibile con riga e compasso se si può ottenere come intersezione di rette e/o circonferenze. Formalizziamo questo concetto. Se P e Q sono due punti del piano ordinario, diremo che la retta passante per P e Q, indicata con r_{PQ}, e la circonferenza di centro P e passante per Q, indicata con C_{PQ}, sono determinate dai due punti P e Q. I punti del piano costruibili con riga e compasso possono essere definiti con un procedimento induttivo nel seguente modo. Poiché per tracciare una retta o una circonferenza abbiamo comunque bisogno di due punti, assumiamo che due punti fissati O e U siano costruibili. Inoltre posto $S_0 := \{O, U\}$, diciamo che un altro punto P del piano è un *punto costruibile* se esiste una successione finita di punti distinti $P_1, ..., P_n := P$ tali che, per ogni $i = 1, ..., n$, P_i sia ottenibile come intersezione di due rette, due circonferenze, oppure di una retta e una circonferenza determinate da due punti dell'insieme $S_{i-1} := \{O, U, P_1, ..., P_{i-1}\}$.

Dati due punti costruibili O e U del piano ordinario, possiamo costruire un riferimento cartesiano ortogonale in cui O sia l'origine e U sia il punto unitario dell'asse delle ascisse. Fissato questo riferimento, intersecando rette e circonferenze costruibili con l'asse delle ascisse o con quello delle ordinate, si ottengono ancora punti costruibili. In particolare, il punto $P \equiv (x, 0)$ è costruibile se e soltanto se lo è il punto $Q \equiv (0, x)$: infatti ad esempio Q è l'intersezione della circonferenza C_{OP} con l'asse delle ordinate.

Quindi, d'ora in poi, assumeremo che nel piano ordinario sia definito un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui l'origine, il punto $U \equiv (1, 0)$ e gli assi coordinati siano costruibili.

Proposizione 1. *Il punto $P \equiv (x, y)$ è costruibile se e soltanto se lo sono i punti $P_x \equiv (x, 0)$ e $P_y \equiv (y, 0)$*

Sia ora $\mathcal{C}$ l'insieme delle coordinate di tutti i punti costruibili, ovvero $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}$ tali che $P \equiv (x, 0)$ è costruibile $\}$

Proposizione 2. *L'insieme $\mathcal{C}$ è un campo numerico reale. Inoltre, se $x \in \mathcal{C}$ e $x \geq 0$, allora $\sqrt{x} \in \mathcal{C}$*

Corollario 1. *Tutti i punti con coordinate razionali sono punti costruibili. Inoltre, sia $F \subseteq \mathcal{C}$ e sia K un campo numerico reale contenente F. Se $[K : F] \leq 2$, allora $K \subseteq \mathcal{C}$.*

Siamo quindi in grado di caratterizzare i punti costruibili in termini di ampliamenti di campi.

Teorema 1. *Il punto $P \equiv (x, y)$ è costruibile se e soltanto se esiste una catena finita di campi numerici reali*

$$\mathbb{Q} := K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n = K$$

tali che $x, y \in K$ e $[K_i : K_{i-1}] \leq 2$ per $i = 1, \cdots, n$.

Poiché ogni ampliamento di grado 2 di un campo numerico F è del tipo $F(\sqrt{d})$ con $d \in F$, il teorema precedente afferma che il punto $P \equiv (x, y)$ è costruibile se e solo se è possibile determinare una catena di campi reali

$$\mathbb{Q} := K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n = K$$

tali che $x, y \in K$ e $K_i = K_{i-1}(\sqrt{d_i})$ con $d_i \in K_i$ per $i = 1, \cdots, n$, cioè se e soltanto se si possono esprimere le coordinate di P in termini di radicali quadratici. Inoltre, poiché tutti i punti le cui coordinate stanno in $K_i = K_{i-1}(\sqrt{d_i})$ si possono costruire intersecando rette e/o circonferenze definite da punti le cui coordinate stanno in K_{i-1}, allora P sarà geometricamente costruibile attraverso una successione di punti $P_i \equiv (x_i, y_i)$, con $x_i, y_i \in K_i$, per $i = 1, \cdots, n$.

Sarà utile nel seguito lavorare nel piano di Gauss anziché nel piano reale ordinario. Identificando il punto $P \equiv (x, y)$ con il numero complesso $z = x + yi$, diremo che il numero complesso z è costruibile se lo è il punto $P \equiv (x, y)$, ovvero se $x, y \in \mathcal{C}$. I risultati dimostrati fin'ora per i punti costruibili possono essere riformulati in termini di numeri costruibili.

Proposizione 3. *L'insieme $\overline{\mathcal{C}}$ dei numeri complessi costruibili è un campo. Inoltre*

(a) *Se $\alpha \in \overline{\mathcal{C}}$, allora $\overline{\alpha} \in \mathcal{C}$;*

(b) *Se $F \subseteq \overline{\mathcal{C}}$ e $[K : F] = 2$, allora $K \subseteq \overline{\mathcal{C}}$.*

Teorema 2. *Il numero complesso α è costruibile se e soltanto se esiste una catena finita di campi numerici*

$$\mathbb{Q} := K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n = K$$

tali che $\alpha \in K$ e $[K_i : K_{i-1}] \leq 2$ per $i = 1, \ldots, n$.

Corollario 2. *Sia $\alpha \in \mathbb{C}$. Se α è costruibile, allora $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^h$, per un opportuno $h \geq 0$.*

I risultati ottenuti nel campo dei numeri complessi sono utilizzati per illustrare a fine capitolo il problema della costruibilità dei poligoni regolari, a cui fornisce una risposta definitiva Gauss nel 1801.

Euclide era in grado di costruire (con riga e compasso) poligoni con 3, 4, 5, 6 e 15 lati. Inoltre, come conseguenza della possibilità di bisecare l'angolo, era noto che se si poteva costruire un poligono regolare con m lati, allora si potevano anche costruire i poligoni regolari con $2^k m$ lati, per $k \geq 1$. Il problema della costruibilità dei poligoni regolari tornò attuale quando F.Gauss dimostrò nel 1796, all'età di 19 anni, che il poligono di 17 lati era costruibile con riga e compasso.

Associamo al punto (x, y) il numero complesso $z = x+yi$. Se ζ è un punto sulla circonferenza unitaria che forma un angolo ϑ con l'asse reale positivo, allora possiamo scrivere che $\zeta = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$. Se $\vartheta = \frac{2\pi k}{n}$ per qualche intero k, n, allora in accordo con le regole di moltiplicazione dei numeri complessi, $\zeta^n = 1$. In altre parole, ζ è una radice complessa dell'equazione $x^n - 1 = 0$. Ponendo $k = 0, 1, \cdots, n-1$, otteniamo n radici distinte di questa equazione: esse sono dette *radici n-esime dell'unità*.

Indichiamo con Π_n il poligono regolare di n lati, che possiamo supporre con il centro nell'origine e con un vertice nel punto $U \equiv (1, 0)$, e indichiamo con P_{nk} i suoi vertici, numerati in senso antiorario in modo tale che $P_{n0} = U$ e $P_{nk} \equiv (\cos\frac{2k\pi}{n}, \sin\frac{2k\pi}{n})$ per $k = 1, \cdots, n-1$. Costruire Π_n equivale allora a costruire tutti i punti P_{nk}, che nel piano di Gauss corrispondono alle radici n-esime dell'unità.

Poiché le radici n-esime dell'unità formano un gruppo ciclico generato da

$$\xi_n := \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

allora il poligono Π_n è costruibile se e soltanto se lo è la radice primitiva n-esima ξ_n.

Si può dimostrare [1] che:

Proposizione 4. *Il poligono regolare con $n \geq 3$ lati è costruibile se e solo se $\varphi(n)$ è uguale ad una potenza di 2.*

Quindi, nel caso in cui n sia potenza di un numero primo, otteniamo subito il seguente risultato.

Teorema 3. *Sia $p \geq 3$ un numero primo e $m \geq 1$. Il poligono regolare di p^m lati è costruibile se e soltanto se $m = 1$ e $p = 2^{2^k} + 1$, con $k \geq 0$.*

I numeri del tipo $2^{2^k}+1$, con $k \geq 0$, si chiamano *primi di Fermat* e vengono usualmente denotati con F_k. Il teorema precedente afferma in particolare che, se p è un numero primo, il poligono regolare di p lati è costruibile con riga e compasso se e soltanto se p è un primo di Fermat.

È Gauss nel 1801 a fornire condizioni necessarie e sufficienti affinché un poligono regolare di n lati, con n arbitrario, sia costruibile.

Teorema 4 (F.Gauss, 1801)**.** *Il poligono regolare di n lati è costruibile se e soltanto se $n = 2^k$ oppure $n = 2^k p_1 \cdots p_m$ dove $k \geq 0$ e $p_1, \cdots, p_m$ sono primi di Fermat.*

Nel **Capitolo 2** viene invece posta l'attenzione su un altro dei problemi classici della matematica: la quadratura del cerchio. Il problema consiste nel costruire, facendo uso della sola riga non marcata e del compasso, un quadrato di area equivalente a quella di un cerchio assegnato. Utilizzando i risultati ottenuti nel capitolo precedente e le proprietà del numero π, si stabilisce che non può essere fornita una risposta positiva al problema, a meno di aumentare il numero degli strumenti ammissibili, come fecero ad esempio Dinostrato e Archimede.

Si tratta di un problema che ha impegnato moltissimo, forse più degli altri, i matematici di tutti i tempi, in quanto può essere ricondotto al problema della determinazione del preciso valore di π. Infatti, sia r il raggio di un cerchio e d il suo diametro. E sia C la circonferenza ed A la sua area. Abbiamo:

$$C = \pi d = 2\pi r$$

$$A = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{2} r C,$$

dove π è il rapporto costante tra la circonferenza e il diametro. Dalla formula dell'area risulta chiaro che l'area del cerchio è pari all'area del triangolo avente per base la circonferenza C e per altezza il raggio r. Per cui il problema della rettificazione della circonferenza risolverebbe il problema della quadratura del cerchio, perché se sappiamo trovare un segmento equivalente alla circonferenza possiamo costruire tale triangolo per trasformarlo, successivamente, nel quadrato richiesto, cosa che è possibile con riga e compasso. Se poi, per semplicità, scegliamo un cerchio di diametro unitario, il nostro problema si riduce ulteriormente al problema di costruire un segmento di lunghezza π. In questi termini la quadratura del cerchio si trasforma in un problema molto più antico: il calcolo di π, la cui storia ricopre millenni.

La soluzione al problema della quadratura è stata data grazie a risultati ottenuti sia da un punto di vista analitico che algebrico. Analiticamente studi fatti da Lambert, Eulero e Lindemann hanno permesso di dimostrare la irrazionalità e la trascendenza di π. D'altra parte, studi fatti sulle radici di polinomi a coefficienti interi, ci permettono di concludere che se volessimo ottenere una quadratura del cerchio con mezzi elementari, il numero π dovrebbe essere soluzione di una equazione algebrica esprimibile mediante radici quadrate. Siccome π non è algebrico, un'equazione siffatta non può essere trovata, per cui il cerchio non può essere quadrato con il solo utilizzo di riga non marcata e compasso.

Infatti, supponiamo che il cerchio abbia raggio $r = 1$ (e quindi area pari a π). Un quadrato ad esso equivalente dovrebbe allora avere lato pari a $\sqrt{\pi}$. Siccome π è trascendente avremo che $[K(\sqrt{\pi}) : K] = \infty$, e, dal corollario 2, segue che la quadratura del cerchio è impossibile.

I tentativi di quadrare il cerchio hanno dato poi origine ad altre interessanti ricerche, come quelle relative alle lunule quadrabili, di cui si discute nel **terzo capitolo**. Partendo dal lavoro di Ippocrate, vengono esposti i principali contributi nella ricerca, arrivando a calcolare nell'ultimo paragrafo le 5 lunule che si dimostrano essere le uniche quadrabili in modo elementare.

Una *lunula*, o *luna*, è una figura curvilinea delimitata da due archi di cerchio che giacciono sullo stesso lato di una comune corda.

Sono da attribuirsi ad Ippocrate tre tipi di lunule quadrabili, aventi rispettivamente l'arco esterno uguale, maggiore o minore di un semicerchio.

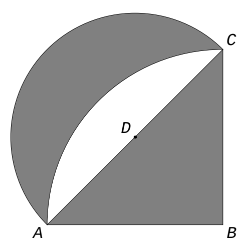
Le uniche proposizioni su cui si basa la dimostrazione di Ippocrate sono:

1. Teorema di Pitagora: la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti di un triangolo rettangolo è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa dello stesso triangolo

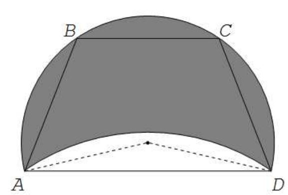
2. Ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto

3. Euclide, Elementi, Proposizione XII.2: le aree di due cerchi o di due semicerchi stanno tra di loro come i quadrati dei loro diametri

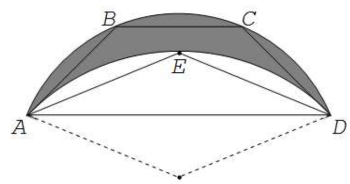
Proposizione 5. *La lunula il cui arco esterno è un semicerchio, e quello interno un quarto di cerchio, è quadrabile.*



Proposizione 6. *Esiste una lunula quadrabile, il cui arco esterno è maggiore di un semicerchio.*

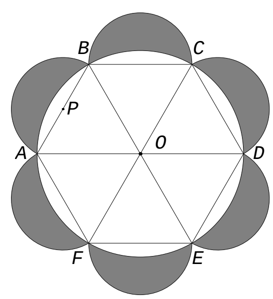


Proposizione 7. *Esiste una lunula quadrabile, il cui arco esterno è minore di un semicerchio.*



Simplicio, da cui abbiamo notizie del lavoro di Ippocrate, citando un commentatore precedente, racconta che Ippocrate aveva sostenuto di essere riuscito a quadrare il cerchio. Molto probabilmente ciò a cui si alludeva era il seguente risultato.

Proposizione 8. *Se la lunula il cui arco esterno è un semicerchio e quello interno un sesto di cerchio fosse quadrabile, allora il cerchio sarebbe quadrabile.*



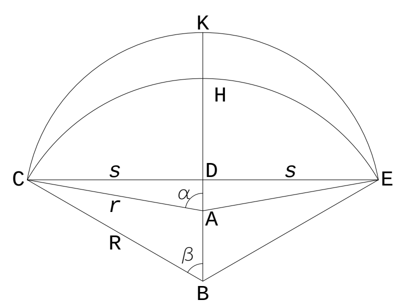
Ippocrate ovviamente non riuscì mai a dimostrare che lunule di quel tipo fossero quadrabili. E molto probabilmente non affermò neppure di essere riuscito a quadrare il cerchio, ma si trattò di un errore di interpretazione dei commentatori del tempo. Tuttavia questo ragionamento rafforzò sempre di più l'idea che la quadratura del cerchio poteva essere possibile: se l'argomento precedente non aveva raggiunto l'obiettivo, allora un piccolo sforzo in più avrebbe portato al successo.

Passa molto tempo prima che venga fatto un significativo passo in avanti. Fra la fine del XVII secolo e l'inizio del XVIII, alcuni matematici pubblicano studi relativi alle lunule, che catturano l'attenzione di Jacob Bernoulli. E proprio suo nipote Nicolaus II ne discute con Goldbach in una lettera del 7 Ottobre 1722. Inizia così uno scambio epistolare fra Goldbach e i Bernoulli, in cui ben presto viene coinvolto Daniel, che porta i due a lanciarsi sempre nuove sfide per riuscire a trovare lunule quadrabili. Nel 1724 *Daniel Bernoulli* afferma di aver trovato una condizione, che dice essere necessaria e sufficiente, per la quadrabilità, ovvero richiede che i due settori circolari abbiamo la stessa area

$$r^2\alpha = R^2\beta$$

cioè

$$R^2 : r^2 = \alpha : \beta. \tag{1}$$



Se con poche osservazioni è facile dimostrare che l'equivalenza dei settori implica la quadrabilità della lunula, l'implicazione inversa invece non è altrettanto immediata. Molti degli autori del tempo accettarono come necessaria la condizione, sebbene Bernoulli stesso non ne diede mai una dimostrazione. Dovremo aspettare quasi 200 anni prima che Landau metta in discussione Bernoulli, dimostrando come la condizione diventi necessaria solo aggiungendo un'ipotesi supplementare.

Tutte e 5 le lunule quadrabili vennero determinate per la prima volta dal matematico finlandese, di solito sconosciuto nell'ambito della storia della matematica, *Daniel Wijnquist*, nella sua dissertazione del 1766. Sebbene redatto in lingua latina, il lavoro di Wijnquist, presentato all'università di Abo (oggi Turku), finì presto nel dimenticatoio e presumibilmente fu noto solo a pochi matematici.

Conosciuti sono invece gli studi di Eulero e di Clausen, a cui notoriamente si attribuiscono le altre due lunule quadrabili. Partendo dal lavoro di Daniel Bernoulli, Eulero mostra che ogni lunula costruibile con riga e compasso corrisponde alla soluzione di una certa equazione polinomiale. Studiando queste equazioni, egli è in grado di dimostrare che per determinati rapporti angolari le lunule non sono costruibili e di trovare due nuovi casi di lunule costruibili non noti ad Ippocrate.

Eulero osserva che affinché una lunula con rapporto angolare $(\alpha : \beta)$ sia quadrabile, deve essere soddisfatta la condizione

$$\frac{\alpha}{sin^2\alpha} = \frac{\beta}{sin^2\beta}. \tag{2}$$

Per trovare una coppia di angoli α, β che soddisfano l'equazione 2 Eulero considera quindi la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\sin^2 x} \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Il grafico di questa funzione è "concavo verso l'alto" con due asintoti verticali a $x = 0$ e $x = \pi$ ed un unico minimo a $x = a \approx 0,371\pi$. Sebbene Eulero non disegni il grafico di questa funzione, ne descrive a parole il comportamento, calcolandone il valore minimo $f(a) \approx 1,38$. Quindi per ogni $c > f(a)$ esistono due valori $\beta < \alpha$ tali che $\frac{\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\beta}{\sin^2\beta} = c$.

Affinché una lunula con angoli 2α e 2β sia costruibile con riga e compasso, devono essere costruibili gli angoli α e β, quindi è sufficiente che ad esempio siano costruibili i loro coseni. Assumiamo che $\alpha = \frac{1}{2}\mu_1\omega$ e $\beta = \frac{1}{2}\mu_2\omega$, dove μ_1 e μ_2 sono interi. La condizione 2 può essere riscritta nella forma

$$\mu_1(1 - \cos\mu_2\omega) = \mu_2(1 - \cos\mu_1\omega). \tag{3}$$

Ora se definiamo $z = \cos\omega$, allora $\cos\mu\omega = \cos(\mu \arccos z) = T_\mu(z)$. La funzione $T_\mu(z)$ è una funzione polinomiale in z, nota come *Polinomio di*

Chebyshev. Quindi l'equazione 3 diventa un'equazione polinomiale in z a coefficienti interi, e se una soluzione z di questa equazione può essere costruita con riga e compasso, allora anche l'angolo ω può essere costruito e di conseguenza la lunula con angoli 2α e 2β.

Eulero sa che oggetti costruibili con riga e compasso corrispondono a soluzioni di equazioni quadratiche. Cartesio aveva infatti mostrato che una lunghezza ottenuta con riga e compasso soddisfaceva un'equazione quadratica e, viceversa, che una lunghezza che soddisfaceva un'equazione quadratica poteva essere costruita con riga e compasso.

Il problema delle quadrabilità delle lunule si riduce quindi a capire quando l'equazione 3 può essere ridotta ad un'equazione quadratica in z. Riportiamo in tabella le equazioni con le corrispondenti soluzioni per i valori μ_1 e μ_2 considerati da Eulero.

μ_1	μ_2	equazione	$z = \cos\omega$
2	1	$z = 0$	$0\ (\omega = \frac{\pi}{2})$
3	1	$2z^2 + 2z - 1 = 0$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
4	1	$2z^3 + 2z^2 - 1 = 0$	/
5	1	$(2z^2 + z - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$	$\frac{\sqrt{5+4\sqrt{5}}-1}{4}$
3	2	$4z^2 + z - 2 = 0$	$\frac{\sqrt{33}-1}{8}$
5	2	$16z^4 + 16z^3 - 4z^2 - 9z - 4 = 0$	/
4	2	$6z^3 + 2z^2 - 4z - 1 = 0$	/
5	3	$(6z^2 + 8z + 1)^2 = 60(z^2 + z)^2$	$\frac{\sqrt{15}-3+\sqrt{60+6+\sqrt{15}}}{12}$
5	4	$16z^4 + 6z^3 - 14z^2 - 4z + 1 = 0$	/

Circa 70 anni dopo le "*Considerationes cyclometricae*" di Eulero, nel 1840, l'astronomo tedesco *Thomas Clausen* afferma di aver scoperto 4 nuove lunule quadrabili. Egli infatti non era a conoscenza del lavoro fatto dai suoi predecessori e attribuiva ad Ippocrate solo il caso $(\alpha : \beta) = (2 : 1)$. Clausen suppone, come già aveva fatto Bernoulli, che i due settori circolari che descrivono la lunula siano equivalenti, e che il rapporto tra gli angoli al centro dei settori sia un numero razionale $\frac{m}{n}$. Lo studio sulla quadrabilità si riconduce quindi allo studio dell'equazione

$$\sqrt{m}\sin n\varphi = \sqrt{n}\sin m\varphi. \tag{4}$$

Utilizzando le formule trigonometriche del seno e del coseno, Clausen ricava anche gli altri quattro casi esibiti da Eulero, illustrandone per ognuno la costruzione e, in accordo con Eulero (di cui però non conosceva il lavoro) suppone che non possano esistere altre lunule quadrabili in modo elementare.

Con il tempo appare sempre più evidente che non ci si può aspettare una soluzione definitiva dalla geometria, ma piuttosto dall'algebra, dalla teoria dei numeri e dall'analisi matematica. Per questo motivo non ci si deve sorprendere se *Edmund Landau* (1877 - 1938), noto per il suo lavoro nella teoria dei numeri e nell'analisi, pubblica nel 1903 un articolo in cui critica la limitata, e per giunta infondata, restrizione attuata da Daniel Bernoulli sulla equivalenza delle aree dei settori circolari. Landau mostra che l'uguaglianza delle superfici è una condizione sufficiente, ma in generale non necessaria, a meno di richiedere che $(\alpha : \beta)$ sia un numero algebrico (il che ovviamente contempla anche il caso razionale, assunto a lungo dagli investigatori del passato).

Nello stesso articolo Landau ottiene un secondo importante risultato. Studiando il caso $(\alpha : \beta) = p$, con p primo dispari non di Fermat (ovvero non della forma $F_k = 2^{2^k} + 1$), egli conclude che la quadratura delle lunule non è possibile.

Al matematico bulgaro *Ljubomir Tschakaloff* (1886 - 1963) spetta invece un duplice merito: da un lato estende i risultati di Landau, dall'altro, introducendo un'incognita complessa, stabilisce l'equazione algebrica risolutiva per la fase finale. Nel nostro lavoro abbiamo quindi per prima cosa dimostrato una breve generalizzazione dei risultati di Landau.

Teorema 5. *Sia p un numero primo non di Fermat e $1 \leq n \leq p-1$. Se $(\alpha : \beta) = (p : n)$, allora la relativa lunula non è quadrabile.*

Poi abbiamo impostato, attraverso la sostituzione di una variabile complessa, l'equazione di Tschakaloff, studiando il caso $(\alpha : \beta) = (17 : 1)$. Landau aveva infatti lasciato aperta la questione della quadrabilità delle lunule nel caso in cui p fosse un primo di Fermat. Per quanto riguarda i numeri di Fermat più piccoli, ovvero $p = 3$ e $p = 5$, sappiamo da Ippocrate e da Clausen che si può dare una risposta affermativa, è perciò stato interessante esaminare il caso $p = 17$, che corrisponde al numero di Fermat successivo.

Da Landau sappiamo che il problema della quadratura di una lunula si riconduce allo studio dell'equazione

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2 = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{5}$$

Scriviamo quindi $\alpha = m\varphi$, $\beta = n\varphi$ e definiamo

$$z = e^{2i\varphi} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi.$$

Sostituendo in 5 otteniamo:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\sin^2 m\varphi}{\sin^2 n\varphi} = \frac{(e^{im\varphi} - e^{-im\varphi})^2}{(e^{in\varphi} - e^{-in\varphi})^2} = \frac{(e^{2im\varphi} - 1)^2 e^{2in\varphi}}{(e^{2in\varphi} - 1)^2 e^{2im\varphi}} = \frac{(z^m - 1)^2 z^n}{(z^n - 1)^2 z^m} = \frac{m}{n}$$

ovvero

$$n(z^m - 1)^2 - m(z^n - 1)^2 z^{m-n} = 0 \tag{6}$$

che è un'equazione algebrica di grado $2m$ nell'incognita complessa z.

Consideriamo ora il caso $(\alpha : \beta) = (m : n) = F_2 : 1 = 17 : 1$. Si ha:

$$(z^{17} - 1)^2 - 17(z - 1)^2 z^{16} = (z - 1)^2[(z^{16} + z^{15} + \cdots + z + 1)^2 - 17z^{16}] = 0.$$

Dividendo per $(z - 1)^2$ e ricordando sempre che $x = z + z^{-1} = 2\cos 2\varphi$ otteniamo il polinomio

$$h(x) = x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1 - \sqrt{17} = 0, \tag{7}$$

che Tschakaloff dimostra essere non solo irriducibile in $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$, ma anche non risolvibile attraverso ripetute estrazioni di radici quadrate. Quindi esso non produce una lunula quadrabile.

I risultati ottenuti da Tschakaloff, tuttavia, non danno ancora una risposta ai casi $(\alpha : \beta) = (p : 1)$, dove p è un altro dei primi di Fermat ad oggi noti, né tanto meno al caso piú generale $(\alpha : \beta) = (m : n)$ con $m \geq 6$ $(m > n > 0)$.

Una risposta definitiva alla questione della quadrabilità delle lunule è stata data solo in tempi recenti da due matematici russi dell'università di Kasan: *N. G. Chebotarev* (1894-1947) e *A. W. Dorodnov*, suo allievo. Affidandosi ai moderni metodi della teoria di Galois e allo studio di serie p-adiche, essi sono stati in grado di dimostrare che le lunule scoperte da Eulero e da Clausen sono tutte e sole le lunule quadrabili. Chebotarev riesce a risolvere nel 1933 i casi in cui sia m che n sono dispari, dimostrando quindi che non vi sono altre lunule eccetto quelle con $(m : n) = (3 : 1)$, $(5 : 1)$, $(5 : 3)$. Nel 1947 poi Dorodnov risolve i casi in cui m è pari e n è dispari, e viceversa: anche questa volta, oltre alle già note lunule con $(m : n) = (2 : 1)$ e $(3 : 2)$, non ve n'è nessun'altra che sia possibile quadrare con riga e compasso. In poco meno di 40 anni si conclude così un problema durato più di duemila anni.

Infine, nel **Capitolo 4** viene affrontato nuovamente il problema della quadratura del cerchio, ma da un nuovo punto di vista: si continua a lavorare solo con riga e compasso, ma non più nel piano euclideo, bensì in quello iperbolico.

Un rettangolo, e in particolare un quadrato, non esiste però nel piano iperbolico. Il classico problema della "quadratura del cerchio" deve essere quindi reinterpretato in geometria iperbolica, sostituendo innanzitutto il quadrato con un poligono regolare di 4 lati.

Alcuni autori hanno affermato che Bolyai riuscì nell'impresa di quadrare il cerchio in geometria iperbolica. Questa affermazione però non è esatta se per cerchio si intende un cerchio arbitrario. La prima ragione è che l'area di un poligono regolare di 4 lati è limitata da 2π, mentre l'area di un cerchio no. Inoltre, anche se un cerchio ha area minore di 2π e raggio costruibile, il poligono regolare con la stessa area potrebbe non essere costruibile.

Bolyai non dimostrò un metodo generale per quadrare un cerchio, ma si limitò a costruire un cerchio di area π e un poligono regolare di 4 lati con angolo di misura $\frac{\pi}{4}$ (e quindi area π), ponendo l'attenzione su quando in generale entrambe le costruzioni fossero possibili [22].

Bolyai trovò inoltre la costruzione di un angolo ausiliare θ associato al cerchio, tramite cui poter scrivere l'area del cerchio nella forma familiare πR^2. Ovvero:

Teorema 6. *Dato un angolo acuto θ o un segmento di lunghezza r è possibile costruire con riga e compasso l'uno dall'altro in modo tale che* $\tan\theta = 2\sinh\frac{r}{2}$.

Corollario 3. *C'è una corrispondenza fra i cerchi di raggio r e gli angoli acuti θ così che l'area di un cerchio è $\pi\tan^2\theta$.*

Neanche nel piano iperbolico è possibile trovare una risposta in generale positiva al problema della quadratura del cerchio, tuttavia viene mostrato che esiste una classe infinita (ma numerabile) di casi per cui la quadratura del cerchio diventa possibile. E, cosa ancora più sorprendente, viene data prova della profonda connessione tra i casi in cui può essere quadrato il cerchio nel piano iperbolico e quelli in cui è possibile costruire un poligono regolare di n lati nel piano euclideo.

Ai fini del nostro lavoro importante è il seguente risultato.

Teorema 7. *Un angolo è costruibile nel piano iperbolico se e solo è costruibile nel piano euclideo.*

Abbiamo già menzionato l'angolo ausiliare θ con la proprietà che l'area di un cerchio di raggio r è $\pi\tan^2\theta$. Un "quadrato" è invece un quadrilatero con 4 lati e 4 angoli (acuti) uguali. Chiamiamo σ uno qualsiasi degli angoli al vertice. Un quadrato può essere costruito quindi ripetendo per otto volte la costruzione di un triangolo rettangolo con angoli $\frac{\sigma}{2}$ e $\frac{\pi}{4}$. Poiché l'area di ogni triangolo è uguale al suo difetto, $\pi - \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\sigma}{2}\right) = \frac{\pi}{4}-\frac{\sigma}{2}$, l'area del quadrato è

$$8\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma}{2}\right) = 2\pi - 4\sigma.$$

Il problema di costruire un quadrato e un cerchio della stessa area può quindi essere riscritto in termini di costruibilità degli angoli θ e σ in $\mathbb{H}^2$, e quindi in $\mathbb{E}^2$, che soddisfano

$$2\pi - 4\sigma = \pi \tan^2 \theta.$$

Nel 1995 William Jagy dimostra il seguente risultato:

Teorema 8. *Supponiamo che un quadrato con angolo σ e un cerchio di raggio r nel piano iperbolico abbiamo la stessa area $\omega \leq 2\pi$. Allora sono entrambi costruibili se e solo se σ soddisfa queste condizioni: $0 \leq \sigma < \frac{\pi}{2}$ e σ è un multiplo intero di $\frac{2\pi}{n}$, dove n è un intero positivo tale che un poligono regolare di n lati è costruibile con riga e compasso nel piano euclideo.*

Osserviamo che con il teorema vengono costruiti sia il quadrato che il cerchio, ovvero viene richiesto che siano entrambi costruibili con riga e compasso; viene naturale chiedersi allora se esista un modo per cui dato l'uno si riesce a costruire l'altro. La risposta è negativa in entrambi i casi, per cui daremo due contro esempi per mostrare che non c'è un metodo generale, in nessuna delle due direzioni.

Il discorso fatto fin quì può essere generalizzato con un poligono regolare di m lati dove $m \geq 4$. Tale poligono ha nel piano iperbolico m angoli uguali di ampiezza σ, tali che $m\sigma < (m-2)\pi$. Possiamo allora esprimere il risultato di Jagy generalizzato nella seguente maniera:

Teorema 9. *Siano dati nel piano iperbolico un cerchio e un poligono regolare di m lati con area uguale a ω. Allora entrambi sono costruibili se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

1. $\omega < (m-2)\pi$
2. *ω è un multiplo razionale di π che ridotto ai minimi termini è della forma $\frac{k}{n}$ dove $n = 1$ oppure n è un numero di Gauss*
3. *m è un numero di Gauss*
4. *m e n non hanno fattori primi dispari in comune*

Ad esempio se m è un qualsiasi numero di Gauss[1] maggiore o uguale a 5, e consideriamo ancora il cerchio costruibile di area π, allora il poligono regolare di m lati con angoli $\frac{\pi(m-3)}{m}$ è costruibile e ha area π. Quindi in geometria iperbolica possiamo non solo quadrare il cerchio, ma costruire anche un pentagono, un esagono o un ottagono con la stessa area del cerchio. Anzi, se non consideriamo stretta la disuguaglianza della prima condizione del teorema e ammettiamo quindi anche i poligoni asintotici, possiamo costruire pure un triangolo equilatero con area π.

[1] $m = 2^k p_1 \cdots p_m$ con $k \geq 0$ e $p_1, \cdots, p_m$ primi di Fermat

Bibliografia

[1] Stefania Gabelli. *Teoria delle equazioni e teoria di Galois.* Springer, Milano, 2008

[2] Robin Hartshorne. *Geometry: Euclid and beyond.* Springer, New York, 2000

[3] George E. Martin. *Geometric constructions.* Springer, New York, 1998

[4] Felix Klein. *Famous problem of elementary geometry: the duplication of the cube, the trisection of an angle, the quadrature of a circle.* Dover Publications Inc., New York, 2003

[5] Wilburn Richard Knorr. *The ancient tradition of geometric problems.* Dover Publications Inc., New York, 1993

[6] L. Berggren, J. Borwein, P. Borwein. *Pi: a source book.* Springer, New York, 1997

[7] Ivan Niven. *A simple proof that π is irrational.* Bull. Amer. Math. Soc., 1947, vol. 53, pg 509

[8] G. H. Hardy, E. M. Wright. *An Introduction to the theory of numbers.* Oxford University Press, New York, 2008

[9] William Dunham. *Journey through genius: the great theorems of mathematics.* Wiley Science Editions, 1990

[10] Piergiorgio Odifreddi. *Divertimento geometrico.* Bollati Boringhieri, 2003

[11] Roshdi Rashed. *Encyclopedia of the history of arabic science, Volume 2.* Routledge, 2009

[12] Umberto Bottazzini. Editor's introduction to *Die Werke von Daniel Bernoulli.* Birkhauser, Basel, 1996

[13] E. Bradley, Lawrence A. D'Antonio, C. Edward Sandifer. *Euler at 300.* The Mathematical Association of America, 2007

[14] Thomas Clausen. Vier neue mondformige Flachen, deren Inhalt quadrierbar ist. *Journal furdie reine und angewandte Mathematik*, Band 21, pp. 375-376, 1840

[15] Edmund Landau. Uber quadrierbare Kreisbogenzweiecke. *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft*, 2, pp. 1-6, 1903

[16] Ivan Niven. *Irrational numbers.* The Mathematical Association of America, 1956

[17] Ljubomir Tschakaloff. Beitrag zum Problem der quadrierbaren Kreisbogenzweiecke. *Mathematische Zeitschrift*, 30, pp. 552-559, 1929

[18] Christoph J. Scriba. Welche Kreismonde sind elementar quadrierbar? Die 2400jahrigeGeschichte eines Problems bis zur endgultigen Losung in den Jahren 1933/1947. *Mitteilungen der math. Gesellschaft in Hamburg*, 11, pp. 517-539, 1988

[19] Abe Shenitzer. The Problem of Squarable Lunes. *American Mathematical Monthly*, 107, pp. 645-651, 2000

[20] N. G. Chebotarev. Uber quadrierbare Kreisbogenzweiecke. *Mathematische Zeitschrift*, 39, pp. 161-175, 1935

[21] A. V. Dorodnov. O krugovykh lunochkakh, kvadriruemykh pri pomoshchi tsirkulya i lineiki. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 58, pp. 965-968, 1947

[22] Roberto Bonola. *Non-Euclidean Geometry.* Dover Publications Inc., New York, 1955

[23] E. E. Moise. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* 3rd ed., Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1990

[24] William C. Jagy. Squaring Circles in the Hyperbolic Plane. *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 17, N. 2, pp. 31-36, 1995

[25] Marvin Jay Greenberg. Old and New Results in the Foundations of Elementary Plane Euclidean and Non-Euclidean Geometries. *The Mathematical Association of America*, Monthly 117, March 2010

[26] Marvin Jay Greenberg. *Euclidean and non-euclidean geometries: development and history.* Freeman, New York, 2008

[27] George E. Martin. *Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane.* Springer, New York, 1975

[28] Robert R. Curtis. Duplicating the cube and other notes on costructions in the hyperbolic plane. *Jounal of Geometry*, Vol. 39, pp. 38-59, 1990

[29] M. W. Al-Dhahir. An instrument in hyperbolic geometry. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13, pp. 298-304, 1962

[30] H. S. M. Coxeter. *Non-euclidean geometry.* 3d ed., Univ. of Toronto Press, 1957